Begrenztes Wachstum

Teil 2

Große Aufgabensammlung

Niveau Klasse 10

Anwendungsaufgaben von e-Funktionen

Das Themenheft dazu hat die Nummer 18820

Es gibt dazu auch zwei Schulstunden-Texte:

Text Nr. 18822 Schulstunde Wachstum 3: Begrenzte Zunahme
Text Nr. 18823 Schulstunde Wachstum 4: Begrenzte Abnahme

Eine große Sammlung von Aufgaben hat die Nummer 45023

Stand: 24. April 2023

Datei – Nr. 18821

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Aufgaben zum begrenzten Wachstum

Aufgabe 511 Erwärmung einer gekühlten Vanillesoße

Eine Vanillesoße wird dem Kühlschrank entnommen. Ihre Temperatur beträgt zu diesem Zeitpunkt 0 genau 10^{O} C. Sie erwärmt sich dann auf Grund der sie umgebenden Zimmertemperatur, die 22^{O} C beträgt. Sofie misst alle paar Minuten die Temperatur an derselben Stelle und erstellt die Temperaturfunktion zum Abkühlungsprozess (und zwar eine Regressionsfunktion mit einem CAS-Rechner), welche die Temperatur als Funktion der Zeit modellhaft beschreibt. Ihr Ergebnis ist $T(t) = 22 - 12 \cdot 0{,}9895^{t}$

a) Skizziere das Schaubild der Funktion T.
Berechne die Temperaturen für t = 40 min und t = 120 min

b) Wann sind genau 16^{O} C erreicht?

c) Zeige, dass die Differenzen zur Zimmertemperatur in gleichen Zeitabschnitten um immer um den gleichen Prozentsatz abnehmen. Wie hoch ist dieser?

Aufgabe 512 Erwärmung eines gekühlten Schokopuddings

Ein Schokopudding wird einem Kühlschrank entnommen. Seine Temperatur beträgt in diesem Moment 10 ^{O}C. Im Zimmer hat es 22 ^{O}C. Die Erwärmung verlaufe so, dass sich die Temperatur in jeweils 10 Minuten um 10% der Temperaturdifferenz zur Umgebung erhöht.

a) Stelle die Gleichung der Temperaturfunktion f(t) auf.
Zeichne ihr Schaubild mit $0 \le t \le 500$ min .

b) Wann hat sich der Mittelwert zwischen Anfangs- und Endtemperatur eingestellt?

c) Wann ist die Temperatur nur noch 1 Promille vom Grenzwert entfernt?

Aufgabe 521 Abkühlung eines Schokopuddings auf Zimmertemperatur

Eine 80^{O}C heiße Vanillesoße kühlt auf Zimmertemperatur (22^{O}C) ab.

Dabei nimmt die Temperatur pro 10 Minuten um 20 % der Temperaturdifferenz ab.

a) Berechne rekursiv drei die Temperatur nach 10, 20 und 30 Minuten.

b) Stelle die Funktionsgleichung für die Abkühlungsfunktion auf.

c) Wie groß wird die Temperatur nach 1 h sein wird?

d) Wann sind 40^{O}C erreicht?

e) In welcher Zeitspanne nimmt die Temperaturdifferenz zur Zimmertemperatur um ein Drittel ab?

Aufgabe 522 Abkühlung einer Suppe auf Zimmertemperatur

Eine heiße Suppe hat zur Zeit t = 0 die Temperatur 70^{O} C. Sie kühlt durch die umgebende 18 ^{O}C warme Zimmerluft ab. Dabei nimmt die Temperaturdifferenz pro 30 Sekunden um 10 % ab.

a) Berechne rekursiv die Temperatur nach 30, 60 und 90 Sekunden.

b) Stelle die Temperaturgleichung auf. Sie hat diese Form: $T(t) = c + a \cdot q^{t}$.
(Ergebnis: $T(t) = 18 + 52 \cdot 0{,}9965^{t}$, t ist die Zeit in Sekunden)

Wie hoch ist die Temperatur 10 Minuten nach Beginn der Abkühlungsphase?

c) Wann ist die Suppe auf 30 ^{O}C abgekühlt?

d) Berechne die Zeitspanne, in der die Temperaturdifferenz zur Umgebung um die Hälfte abgenommen hat (Halbwertszeit für d(T)).

Vergleiche dies mit der Zeit, in der die Suppe nur noch die Hälfte ihrer Anfangstemperatur hatte.

Aufgabe 523 Mäuseexperiment

In einem Versuchslabor werden Mäuse mit einer Krankheit infiziert. Ein Medikament soll eingesetzt werden, und man will die Wirksamkeit testen. In der Versuchsreihe stehen 100 Tiere zur Verfügung. Nach 1 Tag leben noch 84 Tiere, nach dem 2. Tag noch 74.
Wie viele Tiere (Menge L) werden langfristig nicht überleben, wenn man beschränkte Abnahme voraussetzt? Wann werden drei Viertel dieser zu erwartenden Menge gestorben sein? Wann etwa kann man davon ausgehen, dass vermutlich kein Tier mehr an dieser Ursache sterben wird.

(Hilfe: Die Funktion, welche die Anzahl der lebenden Tiere wiedergibt ist $n(t) = 43 \cdot 0{,}625^{t} + 57$.

Die Koeffizienten wurden sinnvoll gerundet)

Aufgabe 530 Aufladen eines Kondensators

GRUNDLAGEN: Ein Kondensator nimmt bei der Aufladung an einer Stromquelle Ladung auf. Die auf dem Kondensator gespeicherte Ladungsmenge ist eine Funktion der Zeit. Anfänglich sei er nicht aufgeladen, d.h. die Ladungsmenge sei $Q(0) = 0$. Dann strömen Elektronen auf die eine Platte und werden von der anderen abgesaugt. Dies geht nicht beliebig lange. Die sich auf der Minus-Platte ansammelnden Elektronen üben nämlich auf nachrückende Elektronen eine abstoßende Kraft aus, so dass der Zufluss gebremst wird und schließlich gegen 0 geht. Man sagt dann, der Kondensator sei aufgeladen. Er trägt dann die maximal mögliche Ladungsmenge Q_{max}. Diese ist abhängig von der angelegten Spannung! Eine Erhöhung der Spannung bedeutet Energiezufuhr für die Elektronen. Somit könnten eine Zeit lang weitere Elektronen nachfließen, bis sich ein neues Gleichgewicht eingestellt hat.

Für die Aufladefunktion gelte hier diese Gleichung: $Q(t) = 2 - 2\cdot 0{,}135^{t}$

t sei die Zeit in Sekunden.

a) Bestimme die maximale Ladung des Kondensators, die zu dieser Funktion gehört.

b) Die Ladungszunahme des Kondensators beschreibt man durch die Abnahme der Differenz zwischen vorhandener Ladung und Maximalladung.
Um wie viel Prozent nimmt diese Differenz pro Sekunde ab?.

c) Wann ist der Kondensator halb aufgeladen?

d) Wann fehlt nur noch 1 Promille zur der Maximalladung?

Lösungen

Lösung Nr. 511

Erwärmung einer gekühlten Vanillesoße

Eine Vanillesoße wird dem Kühlschrank entnommen. Ihre Temperatur beträgt zu diesem Zeitpunkt 0 genau 10^{O} C. Sie erwärmt sich dann auf Grund der sie umgebenden Zimmertemperatur, die 22^{O} C beträgt. Sofie misst alle paar Minuten die Temperatur an derselben Stelle und erstellt die Temperaturfunktion zum Abkühlungsprozess (und zwar eine Regressionsfunktion mit einem CAS-Rechner), welche die Temperatur als Funktion der Zeit modellhaft beschreibt. Ihr Ergebnis ist $T(t) = 22 - 12 \cdot 0{,}9895^{t}$

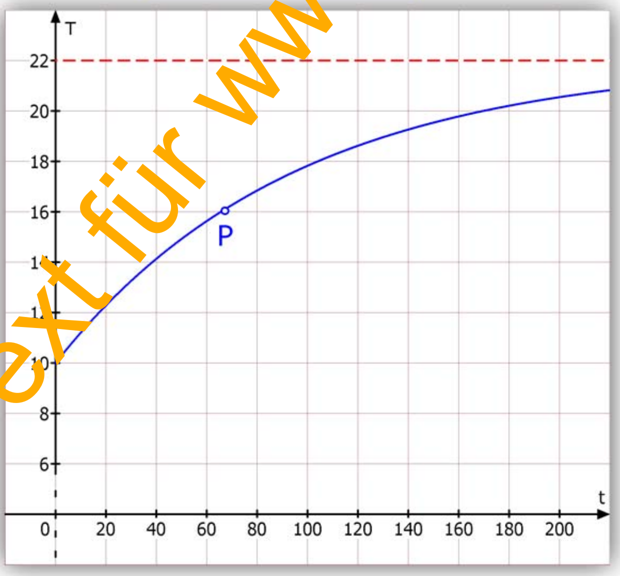
a) Skizziere das Schaubild der Funktion T.
Berechne die Temperaturen für t = 40 min und t = 120 min.

b) Wann sind genau 16^{O} C erreicht?

c) Zeige, dass die Differenzen zur Zimmertemperatur in gleichen Zeitabschnitten um immer um den gleichen Prozentsatz abnehmen. Wie hoch ist dieser?

Lösung:

a) Schaubild der Temperaturfunktion $T(t) = 22 - 12 \cdot 0{,}9895^{t}$



Untersuchung dieses Schaubilds bzw. der Temperaturfunktion T.

Die Funktion beginnt bei T(0) = 10^{O} C. Die Zahl 22 entspricht der Zimmertemperatur. Sie ist offenbar eine obere Grenze, die nie erreicht wird, denn von 22 wird stets etwas subtrahiert, das man durch den Restterm $d(t) = 12 \cdot 0{,}9895^{t}$ berechnen kann.

d(t) gibt die Temperaturdifferenz zur Zimmertemperatur 22^{O}C an.

Gesuchte Temperaturen: $T(40) = 22 - 12 \cdot 0{,}9895^{40} \approx 14{,}2$

$T(120) = 22 - 12 \cdot 0{,}9895^{120} \approx 18.6$

b) Wann beträgt die Temperatur 16°C?

$$16 = 22 - 12 \cdot 0{,}9895^t$$

$$12 \cdot 0{,}9895^t = 22 - 16 \qquad \mathbf{|\ :12}$$

$$0{,}9895^t = \frac{6}{12} = 0{,}5$$

Logarithmieren: $\log 0{,}9895^t = \log 0{,}5$

Logarithmenregel: $t \cdot \log 0{,}9895 = \log 0{,}5 \qquad |:\log 0{,}9895$

$$t = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}9895} \approx 66$$

Diese Situation ist als Punkt P im Schaubild auf der Seite zuvor eingetragen.

Hinweis: Viele Schüler dürfen im Unterricht zum Lösen solcher Gleichungen geeignete Rechner verwenden (Grafikrechner oder CAS-Rechner), dann entfällt diese logarithmische Berechnung. Mit TI Nspire CAS sieht das z. B. so aus:

$\mathrm{solve}\left(16=22-12\cdot(0.9895)^x,x\right) \qquad x=65.6668$

c) Berechnung der Temperaturdifferenzen:

Für die Temperaturdifferenz gilt diese Berechnungsformel:

$$d(t) = S - T(t) = 22 - \left[22 - 12 \cdot 0{,}9895^t\right] = 12 \cdot 0{,}9895^t$$

Berechnung einiger Zahlenwerte:

Zur Zeit t = 0: $d(0) = 12$

Zur Zeit t = 1: $d(1) = 12 \cdot 0{,}9895$

Zur Zeit t = 2: $d(2) = 12 \cdot 0{,}9895^2$

Quotienten aufeinander folgender Differenzen:

$$\frac{d(2)}{d(1)} = \frac{12 \cdot 0{,}9895^2}{12 \cdot 0{,}9895} = 0{,}9895$$

$$\frac{d(1)}{d(0)} = \frac{12 \cdot 0{,}9895}{12} = 0{,}9895$$

Wie man sieht, sind diese Quotienten konstant.

Beispiele genügen jedoch nicht, man muss dies allgemein beweisen:

Allgemein zur Zeit t: $d(t) = 12 \cdot 0{,}9895^t$

1 Minute später (d. h. zur Zeit t+1) $d(t+1) = 12 \cdot 0{,}9895^{t+1}$

Quotient:

$$q = \frac{d(t+1)}{d(t)} = \frac{12 \cdot 0{,}9895^{t+1}}{12 \cdot 0{,}9895^t} = \frac{\cancel{12 \cdot 0{,}9895^t} \cdot 0{,}9895}{\cancel{12 \cdot 0{,}9895^t}} = 0{,}9895$$

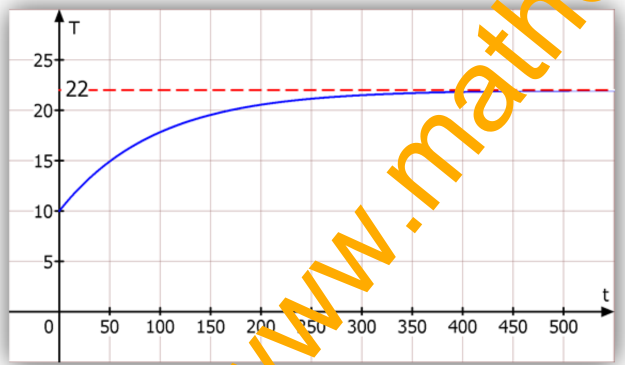
Es gilt also $d(t+1) = q \cdot d(t)$ mit $q = 0{,}9895$. Der Prozentsatz der Abnahme der Temperatur-Differenzen isr also $p = 1 - q = 0{,}0105 = 1{,}05\%$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Ich schließe ein paar Überlegungen an, die klar werden sollten:

Diese begrenzte Zunahme der Temperatur geschieht und er Modellannahme, dass die Temperaturdifferenz in gleichen Zeitspannen um den gleichen Prozentsatz abnimmt. Hier hat sich die Abnahme pro Minute um 1,05% ergeben.

MERKE: Die Temperatur nimmt also nicht exponentiell zu, sondern die Temperaturdifferenz zur Grenztemperatur nimmt exponentiell ab.

Damit geht die Soßentemperatur asymptotisch gegen die Zimmertemperatur. Diese wird damit theoretisch nie erreicht, aber irgendwann ist sie ihr so nahe, dass man den Unterschied nicht mehr messen kann. Dies zeigt vor allem das nächste Schaubild mit anderem Maßstab:



Jetzt wird klar, warum man hier von begrenztem Wachstum spricht. Das Wachstum wird durch die erwärmende Zimmertemperatur klar begrenzt, denn höher kann sie nicht steigen.
Je nach Genauigkeitsanspruch kann man eine Aussage darüber machen, wann die Zimmertemperatur erreicht sein wird. Mathematisch und modellmäßig gesehen nie, man kann aber einen Näherungwert von etwa 500 Minuten ablesen. Oder man fragt: Wann ist die Temperaturdifferenz weniger als 0,1°C?

$d(t) = 12 \cdot 0{,}9895^t < 0{,}1$ Die Lösung ist laut TI Nspire:

$\text{solve}\left(12\cdot(0.9895)^x<0.1,x\right) \quad x>453.554$

Jetzt wissen wir mehr: Nach 454 Minuten fehlen bis zur Zimmertemperatur laut mathematischem Erwärmungsmodell noch 0,1°C.

Merkmal für solche Aufgaben:

Beim beschränkten Wachstum nimmt die Differenz zum Grenzwert exponentiell ab,